

范例 2-002

壳 – 承受静荷载的直梁

问题描述

此例中，一个由壳单元模拟的直悬臂梁，承受在端部 3 个正交方向的单位力，和在端部关于 3 个正交方向单位弯矩，每个在一个不同的荷载工况内。在端部荷载方向的位移和手算结果进行了比较。

需要注意此例是测试壳单元的一个极端的范例。壳单元一般不用来模拟深度与宽度比为 2 比 1 的梁。

基本的几何，属性和荷载在 MacNeal and Harder 1985 中描述。此悬臂梁为 6 in 长，平行于 Z 方向 0.2 in 宽，平行于 Y 方向 0.1 in 宽。建立了 5 个不同的模型，每个有不同的剖分。模型 A、B 和 C 分别使用 6x1 的长方形，梯形和平行四边形单元的剖分，个别的如 MacNeal and Harder 1985 中建议。模型 D 以一个 6x1 长方形剖分开始，然后将每个长方形分割为 2 个三角形。模型 E 以 6x1 的长方形单元开始，然后将每个长方形单元分割为 4 个三角形。在模型 D 和 E 中使用的单元没有在 MacNeal and Harder 1985 中。

对于每个模型建立 6 个荷载工况。6 个荷载工况分别在悬臂梁端部施加一个单位轴力，一个单位平面内力，一个单位平面外力，一个单位扭矩，一个单位平面内弯矩和一个单位平面外弯矩。扭矩以在 Y 方向的力偶形式施加。平面内弯矩以在 X 方向的力偶形式施加。平面外弯矩以弯矩形式施加。

使用基本的梁理论来得到手算解，假定在支座处没有泊松效应。在 SAP2000 中模拟的梁符合此假定。在固定段，节点 1 的 U_x , U_y , U_z 和 R_z 自由度，及节点 8 的 U_x , U_y , 和 R_z 自由度被约束。节点 8 的 U_z 自由度没有被约束，来避免在模型中施加不期望的泊松效应。而且，当梁被施加面内的剪力时，在节点 8 施加等于端部力的一半的面内力。施加在节点 8 的特殊荷载来模拟没有泊松效应的反力。

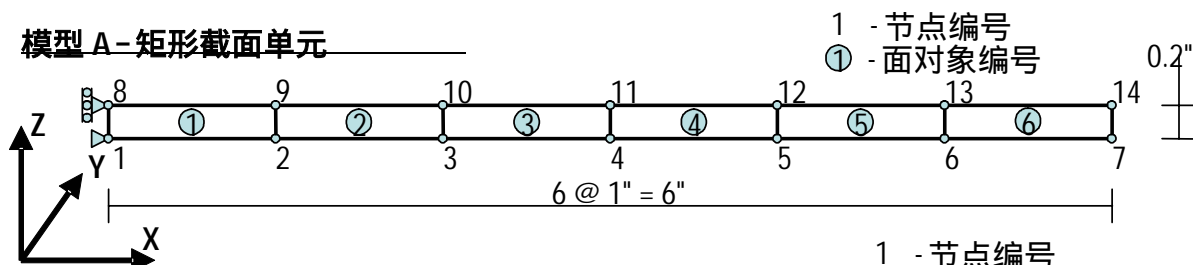
Software Verification

PROGRAM NAME: SAP2000
REVISION NO.: 0

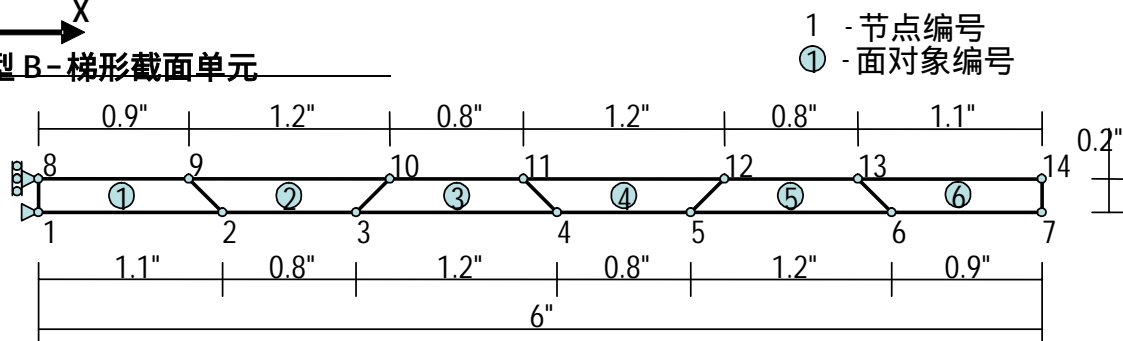
几何

PROGRAM NAME: SAP2000
REVISION NO.: 0

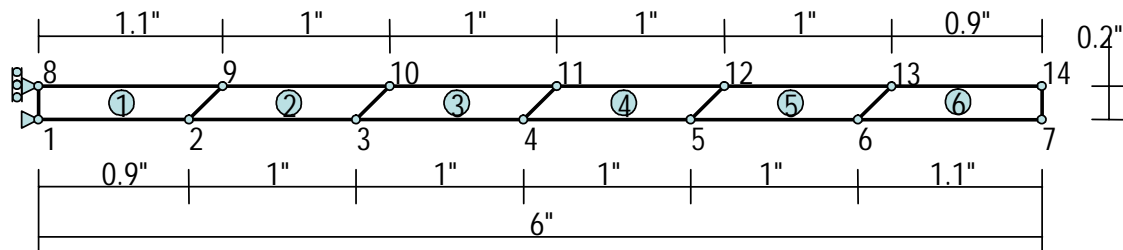
模型 A - 矩形截面单元



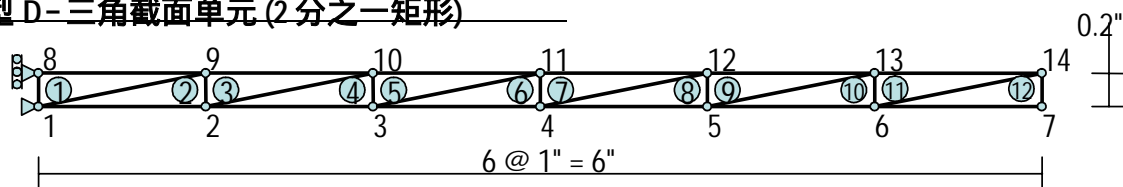
模型 B - 梯形截面单元



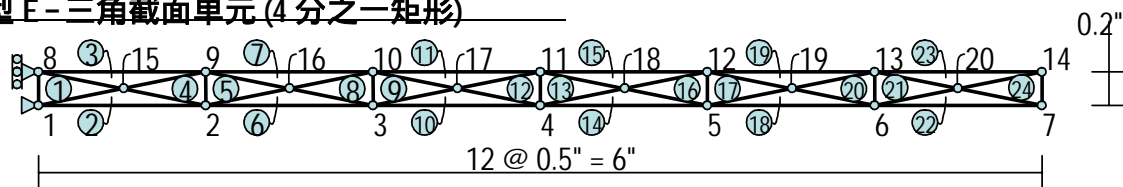
模型 C - 平行四边形截面单元



模型 D - 三角截面单元 (2 分之一矩形)



模型 E - 三角截面单元 (4 分之一矩形)



属性

$$E = 10,000,000 \text{ lb/in}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$G = 3,846,154 \text{ lb/in}^2$$

$$\text{壳截面厚度} = 0.1 \text{ in}$$

荷载

下表定义了施加于每一模型的荷载。

荷载工况	荷载
1	$F_x = +0.5 \text{ lb}$ at jts 7 and 14
2	$F_z = +0.5 \text{ lb}$ at jts 7 and 14 $F_z = -0.5 \text{ lb}$ at jt 8
3	$F_y = +0.5 \text{ lb}$ at jts 7 and 14
4	$F_y = -5 \text{ lb}$ at jt 7, and $F_y = +5 \text{ lb}$ at jt 14
5	$F_x = -5 \text{ lb}$ at jt 7, and $F_x = +5 \text{ lb}$ at jt 14
6	$M_z = +0.5 \text{ lb-in}$ at jt 7, and $M_z = +0.5 \text{ lb-in}$ at jt 14

所测试 SAP2000 的技术特性

- 使用壳单元的膜分析
- 使用壳单元的板弯曲分析
- 壳单元方面比的效应
- 壳单元从长方形的几何扭曲效应
- 节点力荷载

结果比较

SAP2000 结果对于薄板和厚板分别列出。手算结果使用 Cook 和 Young 1985 第 244 页的单位荷载法。另外，使用 Roark 和 Young 1975 第 290 页表 20 的第 4 项来计算截面的扭转刚度 J 。手算解在 MacNeal and Harder 1985 中发表。

薄板选项

荷载工况和类型	模型和单元形状	输出参数	SAP2000	手算解	差异百分比
荷载工况 1 轴向拉伸	A- 长方形	U_x 节点 7 和 14 的平均 值 in	3E-05	3E-05	0%
	B- 梯形		3E-05		0%
	C- 平行四边形		3E-05		0%
	D- 三角形 2		3E-05		0%
	E- 三角形 4		3E-05		0%
荷载工况 2 平面内剪切 和弯曲	A- 长方形	U_z 节点 7 和 14 的平均 值 in	0.1072	0.1081	-1%
	B- 梯形		0.0227		-79%
	C- 平行四边形		0.0804		-26%
	D- 三角形 2		0.0032		-97%
	E- 三角形 4		0.0066		-94%
荷载工况 3 平面外剪切 和弯曲	A- 长方形	U_y 节点 7 和 14 的平均 值 in	0.4320	0.4321	0%
	B- 梯形		0.4322		0%
	C- 平行四边形		0.4322		0%
	D- 三角形 2		0.4296		-1%
	E- 三角形 4		0.4314		0%

薄板选项

荷载工况和类型	模型和单元形状	输出参数	SAP2000	手算解	差异百分比
荷载工况 4 扭转	A- 长方形	U_y 在节点 7 和 14 绝对值的 平均 in	0.00233	0.00341	-32%
	B – 梯形		0.00233		-32%
	C – 平行四边形		0.00233		-32%
	D – 三角形 2		0.00231		-32%
	E – 三角形 4		0.00230		-33%
荷载工况 5 平面内弯矩	A- 长方形	U_x 在节点 7 和 14 绝对值的 平均 in	8.990E-04	9.000E-04	0%
	B – 梯形		1.395E-04		-85%
	C – 平行四边形		7.225E-04		-20%
	D – 三角形 2		0.265E-04		-97%
	E – 三角形 4		0.550E-04		-94%
荷载工况 6 平面外弯矩	A- 长方形	R_z 在节点 7 和 14 的平均 值 radians	0.03600	0.03600	0%
	B – 梯形		0.03600		0%
	C – 平行四边形		0.03600		0%
	D – 三角形 2		0.03600		0%
	E – 三角形 4		0.03600		0%

厚板选项

荷载工况和类型	模型和单元形状	输出参数	SAP2000	手算解	差异百分比
荷载工况 1 轴向拉伸	A- 长方形	U_x 节点 7 和 14 的平均 值 in	3E-05	3E-05	0%
	B- 梯形		3E-05		0%
	C- 平行四边形		3E-05		0%
	D- 三角形 2		3E-05		0%
	E- 三角形 4		3E-05		0%
荷载工况 2 平面内剪切 和弯曲	A- 长方形	U_z 节点 7 和 14 的平均 值 in	0.1072	0.1081	-1%
	B- 梯形		0.0227		-79%
	C- 平行四边形		0.0804		-26%
	D- 三角形 2		0.0032		-97%
	E- 三角形 4		0.0066		-94%
荷载工况 3 平面外剪切 和弯曲	A- 长方形	U_y 节点 7 和 14 的平均 值 in	0.4321	0.4321	0%
	B- 梯形		0.4307		0%
	C- 平行四边形		0.4322		0%
	D- 三角形 2		0.4328		0%
	E- 三角形 4		0.4298		-1%

厚板选项

荷载工况和类型	模型和单元形状	输出参数	SAP2000	手算解	差异百分比
荷载工况 4 扭转	A- 长方形	U_y 在节点 7 和 14 绝对值的 平均 in	0.00224	0.00341	-34%
	B – 梯形		0.00409		+20%
	C – 平行四边形		0.00240		-30%
	D – 三角形 2		0.00466		+37%
	E – 三角形 4		0.00458		+34%
荷载工况 5 平面内弯矩	A- 长方形	U_x 在节点 7 和 14 绝对值的 平均 in	8.990E-04	9.000E-04	0%
	B – 梯形		1.395E-04		-85%
	C – 平行四边形		7.225E-04		-20%
	D – 三角形 2		0.265E-04		-97%
	E – 三角形 4		0.550E-04		-94%
荷载工况 6 平面外弯矩	A- 长方形	R_z 在节点 7 和 14 的平均 值 radians	0.03600	0.03600	0%
	B – 梯形		0.03600		0%
	C – 平行四边形		0.03600		0%
	D – 三角形 2		0.03600		0%
	E – 三角形 4		0.03600		0%

数据文件: Example 2-002a-thick, Example 2-002a-thin,
Example 2-002b-thick, Example 2-002b-thin,
Example 2-002c-thick, Example 2-002c-thin,
Example 2-002d-thick, Example 2-002d-thin,
Example 2-002e-thick, Example 2-002e-thin,
Example 2-002f-thick, Example 2-002f-thin,
Example 2-002g-thick, Example 2-002g-thin,
Example 2-002h-thin

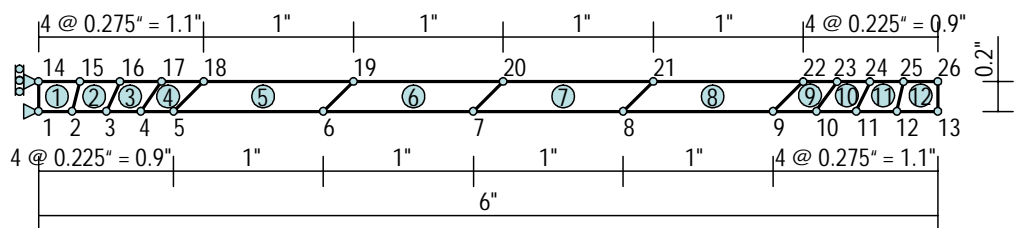
平面内剪切和弯曲的讨论(荷载工况 2 和 5)

对于面内行为，薄板和厚板基本上有同样的形式，因此对于荷载工况 2 和 5 产生相同的结果。在此节中的讨论适用于薄板和厚板选项。

面内剪切和弯曲结果和单元的形状有关。长方形单元显示可以接受的结果。梯形单元和三角形单元显示不能接受的结果。起初，平行四边形单元显示不能接受的结果；然而，下面的讨论解释了在模型 C 的每一端的梯形单元如何引发不能接受结果。

模型 F 和模型 C 是相同的，除了如下图显示，在端部的梯形单元每个被分割为 4 个单元。在模型 C 和 F 中的平行四边形单元是相同的。

Model F



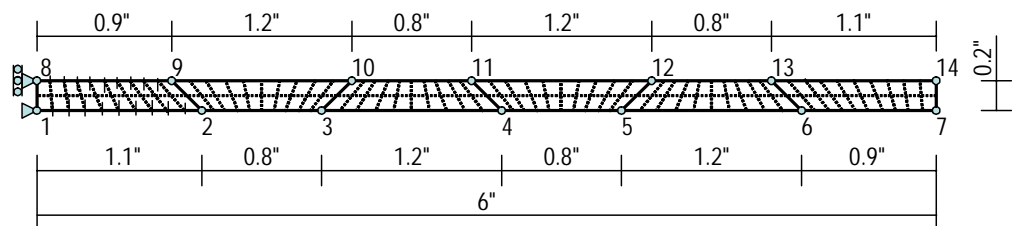
对于荷载工况 2 和 5 的对于薄板和厚板选项的结果在下表中显示。对于模型 F 的结果是可接受的，显示与手算解的差异为 2%。将模型 C 和 F 比较，在模型 C 中得到的不可接受的面内剪切和弯曲结果，是由梯形端部单元造成的，不是平行四边形的内部单元。

模型结果（平行四边形单元）

荷载工况和类型	模型和单元形状	输出参数	SAP2000	手算解	差异百分比
荷载工况 2 面内剪切和弯曲	薄板	U_z 节点 13 和 26 的平均值 in	0.1061	0.1081	-1.9%
	厚板		0.1061		-1.9%
荷载工况 5 面内弯矩	薄板	U_x 节点 13 和 26 绝对值的平均值 in	8.886E-04	9.000E-04	-1.3%
	厚板		8.886E-04		-1.3%

可使用梯形单元得到可接受的结果；然而，梯形单元对于梯形对边间的角度和单元的方面比敏感。模型 G 和模型 B 类似，除了在模型 B 中的 6 个梯形单元被分割为 10×2 的单元，如下图所示。此进一步剖分减少了在单个梯形单元对边间的角度，从 90 到 9 度，并将方面比从 5 到 1 改善至大约 1 到 1。

Model G



对于薄板和厚板在荷载工况 2 和 5 下的结果，显示于下表。对于模型 G 的结果是可以接受的，显示结果和手算解的差异为小于 2%。

模型 G 结果 (有 60 x 2 剖分的梯形单元)

荷载工况和类型	模型和单元形状	输出参数	SAP2000	手算解	差异百分比
荷载工况 2 面内剪切和弯曲	薄板	U_z 节点 7 和 14 的平均值 in	0.1071	0.1081	-0.9%
	厚板		0.1071		-0.9%
荷载工况 5 面内弯矩	薄板	U_x 节点 7 和 14 绝对值的平均值 in	8.825E-04	9.000E-04	-1.9%
	厚板		8.825E-04		-1.9%

对于有薄板选项的壳的扭曲讨论 (荷载工况 4)

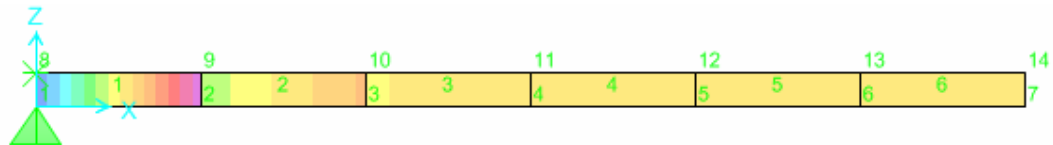
薄板和厚板选项对于面外的和扭转行为有不同的形式，并对荷载工况 4 产生不同的结果。在此节的讨论特别适用于薄板选项。但其中多数讨论也适用于厚板选项。

薄板的扭转结果相对来说与单元的形状关系不大。扭转结果相当于手算解的 32%。此差异的主要原因是程序使用的壳理论和手算解使用的梁理论的不同。次要的原因为在悬臂梁固定端部使用了 R_z 约束，其使扭矩在靠近固定端处不均匀。此两项在下文中描述。

在手算中使用的扭转刚度 J ，来自 Roark and Young 1975 中第 290 页表 20 中的第 4 项。 J 值为 0.000045776 in^4 ，等于 $0.22888bd^3$ 。在 SAP2000 中的壳单元假定壳的厚度和整个壳剖分相比很小。这样，等效的壳理论的 J 为 $bd^3/3$ 。手算的 J 除以壳理论的 J 为 0.68664。

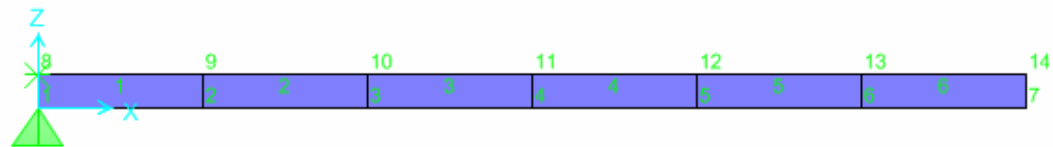
最初的手算从扭转产生的位移基于 $J = 0.22888bd^3$ ，为 0.00341 in。若使用 $J = bd^3/3$ 计算，结果为 $0.00341 * 0.68664 = 0.00234$ in。这和程序产生的结果近似，但不完全一样。不完全一样的原因在于在程序模型的固定端使用了 R_z 约束。

对于三维的计算机模型，需要在梁的固定端使用 R_z 约束，从而达到稳定且抵抗在荷载工况 3 和 6 中的面外荷载产生的弯矩。此约束使在荷载工况 4 中产生的扭转弯矩 M_{12} 在梁的长度方向上应该为恒定的，在梁的端部是变化的，如下面 M_{12} 等势图所示。



对于模型 A 薄板的 M_{12} 扭矩（单位长度）等势图

模型 H(Example 2-002h-thin)只对荷载工况 4 建立。从模型 H 中去除了 R_z 的约束，在此处提供了一个很小的 R_z 旋转弹簧来确保三维模型的稳定。模型 H 使用了类似模型 A 的长方形壳单元。模型 H 的扭转荷载所产生的位移为 0.00234 in，这和使用壳理论 J 为 $bd^3/3$ 的手算结果相同。下面显示了模型 H 的 M_{12} 扭矩等势图。扭矩在梁的长度方向上不变，和期望的一致。



对模型 H 薄板的 M_{12} 扭矩（单位长度）等势图

使用厚板选项的壳的扭转讨论（荷载工况 4）

对于面外和扭转行为，薄板和厚板选项有不同的形式，并对荷载工况 4 产生不同的结果。在此节的讨论特别适用于厚板选项。

厚板选项的结果与单元的形状有关系。根据单元的形状，厚板选项的扭转结果可小于手算解至 34%，且大于手算解至 37%。此不同的主要原因为程序使用的壳理论和手算解使用的梁理论的不同，及壳的方面比和壳于长方形的不同。这些项在下面讨论。

PROGRAM NAME:	SAP2000
REVISION NO.:	0

在手算中使用的扭转刚度 J , 来自 Roark and Young 1975 中第 290 页表 20 中的第 4 项。 J 值为 0.000045776 in^4 , 等于 $0.22888bd^3$ 。在 SAP2000 中的壳单元假定壳的厚度和整个壳剖分相比很小。这样, 等效的壳理论的 J 为 $bd^3/3$ 。手算的 J 除以壳理论的 J 为 0.68664。

最初的手算从扭转产生的位移基于 $J = 0.22888bd^3$, 为 0.00341 in。若使用 $J = bd^3/3$ 计算, 结果为 $0.00341 * 0.68664 = 0.00234 \text{ in}$ 。这是我们期望的程序的理论解。它和长方形单元的和平行四边形单元的结果比较得很好 (大约 4% 的不同)。其与梯形和三角形单元得结果比较得不好。

可进一步剖分梯形单元来得到更好得结果。例如, 若模型 B 中的 6 个梯形面对象的每一个被剖分为 10×2 , 所产生得扭转位移为 0.00239in, 其和使用壳理论的期望结果及使用长方形和平行四边形单元得到的结果相比较得很好 (约 2% 的不同)。

三角形模型一般在扭转上比其它模型刚度要小。甚至使用等边三角形 (没有模型文件内) 的模型, 有一个扭转位移约 0.003in, 和我们期待的从程序得到的理论解有约 30% 的不同。

结论

对于薄板和厚板选项的轴向拉伸和面外剪切和弯曲, SAP2000 结果和手算解在多种工况有可接受的准确比较。

对于薄板和厚板选项的面内剪切和/或弯曲, SAP2000 结果对于长方形和平行四边形单元是可接受的, 对于其它形状的单元是不好的。对于面内剪切和/或弯曲显著的情况, 不建议使用三角形单元。对于面内剪切和/或弯曲显著的情形, 若可使用长方形或平行四边形单元, 应避免使用梯形单元。而在下面的建模中建议使用梯形单元是必要的:

1. 总使用两个或多个单元的剖分。
2. 减小在梯形对边间得夹角。
3. 使用接近 1 至 1 得方面比。


4. 仔细查看结果，确认在单元间应力连续。

对于薄板选项的 SAP2000 的结果是相当一致的，但其和手算解有显著不同。这是因为 SAP2000 的结果是基于壳理论且手算结果是基于梁理论。壳理论假定壳的厚度相比整个壳的尺寸较小，这样扭转刚度 J 为 $bd^3/3$ 。对于此例的特殊几何，梁理论计算的 J 约为 $bd^3/4.37$ 。在 J 的不同是结果不同的原因。

对于厚板扭转选项的 SAP2000 结果不同且其和手算解显著不同。这是因为在前面段中描述的 J 的不同，且厚板的扭转结果对于壳单元的方面比和几何扭曲是敏感的。当方面比约为 1 时，扭转结果更为一致。

在许多类型的结构中，特别是近似使用壳单元的结构，扭转行为的效应是可以忽略的，这样任何在扭转变形的不准确性是不显著的。

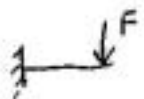
手算过程

Load Case 1 - Axial Extension 

$$\Delta = \int_0^L \frac{P}{EA} dx = \int_0^L \frac{P}{EA} dx = \frac{PL}{EA}$$

$$\Delta = \frac{1 \times 6}{10,000,000 \times 0.2 \times 0.1}$$

$$\Delta = 0.00003 \text{ in}$$

Load Case 2 - In-Plane Bending and Shear 

$$\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx + \int_0^L \frac{vV}{GA_v} dx$$

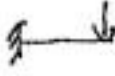
$$= \int_0^L \frac{Fx^2}{EI} dx + \int_0^L \frac{F dx}{GA_v}$$

$$= \frac{FL^3}{3EI} + \frac{FL}{GA_v}$$

$$= \frac{1 \times 6^3}{3 \times 10,000,000 \times \left(\frac{0.1 \times 0.2^3}{12}\right)} + \frac{1 \times 6}{3846154 \times \left(\frac{5}{6} \times 0.2 \times 0.1\right)}$$

$$\Delta = 0.10800 + 0.00009$$

$$\Delta = 0.10809 \text{ in}$$

Load case 3 - Out-of-Plane Bending and Shear 


$$\Delta = \frac{FL^3}{3EI} + \frac{FL}{GA_v}$$

$$\Delta = \frac{1 \times 6^3}{3 \times 10,000,000 \times \left(\frac{0.2 \times 0.1^3}{12} \right)} + \frac{1 \times 6}{3846154 \times \left(\frac{5}{6} \times 0.2 \times 0.1 \right)}$$

$$\Delta = 0.43200 + 0.00009$$

$$\boxed{\Delta = 0.43209 \text{ in}}$$

Load Case 4 - Twist

$$\Theta_x = \int_0^L \frac{tT}{GJ} dx = \int_0^L \frac{T dx}{GJ} = \frac{TL}{GJ}$$


From: Roark and Young 1975

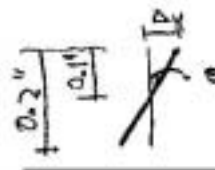
Item 4, Table 20, page 290

$$J = \left(\frac{b}{2} \right) \left(\frac{t}{2} \right)^3 \left[\frac{16}{3} - 3.36 \left(\frac{t/2}{b/2} \right) \left(1 - \frac{(t/2)^4}{12(b/2)^4} \right) \right]$$

$$J = (0.1)(0.05)^3 \left[\frac{16}{3} - 3.36 \left(\frac{0.05}{0.1} \right) \left(1 - \frac{0.5^4}{12 \times 0.1^4} \right) \right]$$

$$J = 0.000045776$$

$$\Theta_x = \frac{1 \times 6}{3846154 \times 0.000045776} = 0.03408 \text{ radians}$$



$$\Delta_y = 0.1 \sin \Theta = 0.1 \Theta = 0.1 \times 0.03408$$

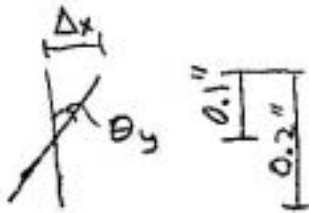
$$\boxed{\Delta_y = 0.00341 \text{ in}}$$

Load Case 5 - In-Plane Moment $\rightarrow M$

$$\theta_y = \int_0^L \frac{M}{EI} dx = \frac{ML}{EI}$$

$$\theta_y = \frac{1 \times 6}{10,000,000 \times \left(\frac{0.1 \times 0.2^3}{12} \right)}$$

$$\theta_y = 0.00900 \text{ radians}$$



$$\Delta x = 0.1 \sin \theta_y = 0.1 \theta_y = 0.1 \times 0.00900$$

$$\Delta x = 0.00090 \text{ in}$$

Load Case 6 - Out-of-Plane Moment $\rightarrow M$

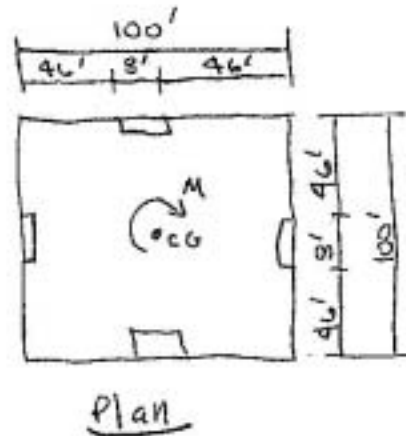
$$\theta_z = \frac{ML}{EI}$$

$$\theta_z = \frac{1 \times 6}{10,000,000 \times \left(\frac{0.2 \times 0.1^3}{12} \right)}$$

$$\theta_z = 0.03600 \text{ radians}$$

The conclusions state that in many types of structures, particularly those where use of shell elements is appropriate, the effect of the twisting behavior is negligible and thus any inaccuracies in the twisting deformations are inconsequential. This example is back up for that statement

Consider an example one-story building shown to the right. It is 100' by 100' in plan and the story height is 12'. There are 8' long by 1' thick shear walls along each of the four sides of the building. The building has a rigid diaphragm and is subjected to a torsional moment M .

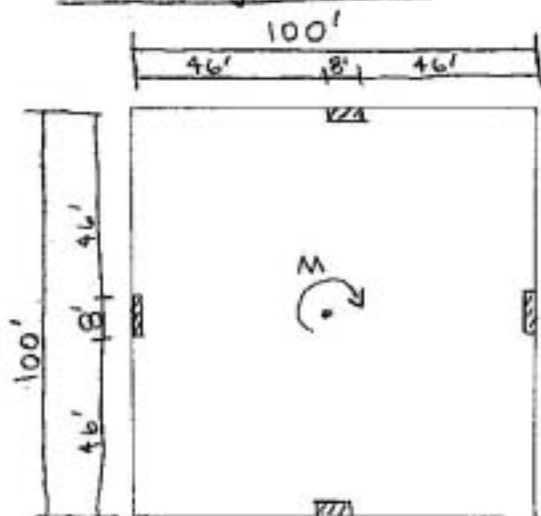


Plan

Hand calculations shown on the following pages predict that 99.94% of the torsional moment is resisted by shear forces at the tops of the wall and 0.06% is resisted by twisting moments at the tops of the walls. Assuming the twisting stiffness is inaccurate by as much as 40% in a computer model, a computer model might predict 0.04% to 0.08% of the torsional moment is resisted by twisting moments at the top of the wall.

This has an insignificant effect on the shear force resisted by the walls.

Twisting Study



f_s = fraction of torsion resisted as a shear force in each wall

f_t = fraction of torsion resisted as a twisting moment in each wall

$$4f_s + 4f_t = 1$$

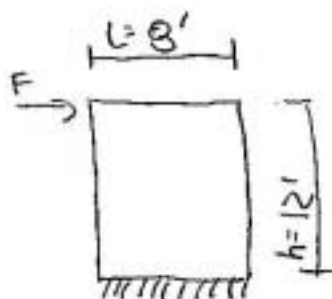
Walls are 8' long by 1' thick

$$E = 3600 \text{ Ksi} = 518400 \text{ Ksf}$$

$$\nu = 0.2$$

$$G = 1500 \text{ Ksi} = 216000 \text{ Ksf}$$

story height is 12 ft



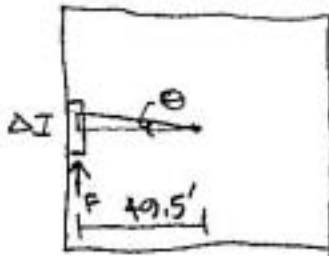
Calculate Δ resulting from shear

$$\Delta = \frac{Fh^3}{3EI} + \frac{Fh}{GA_v}$$

$$F = \frac{f_s M}{49.5} \quad ; \quad \text{Note distance from centroid to center of wall is 49.5'}$$

$$\Delta = \frac{f_s M h^3}{148.5EI} + \frac{f_s M h}{49.5GA_v}$$

$$\frac{\Delta}{M} = \frac{f_s h^3}{148.5EI} + \frac{f_s h}{49.5GA_v}$$



$$\Delta = 49.5 \Theta$$

Thus

$$\frac{49.5 \Theta}{M} = \frac{f_s h^3}{148.5 EI} + \frac{f_s h}{49.5 GA_v}$$

$$\frac{\Theta}{M} = \frac{f_s h^3}{7350.75 EI} + \frac{f_s h}{2450.25 GA_v}$$

Calculate Θ resulting from twist

From Roark and Young 1975 Item 4, Table 20, page 290

$$J = 4 \times 0.5^3 \left[\frac{16}{3} - 3.36 \left(\frac{0.5}{4} \right) \left(1 - \frac{0.5^4}{12 \times 4^4} \right) \right]$$

$$J = 2.457 ft^4$$

$$\Theta = \frac{T h}{G J} = \frac{f_t M h}{G J}$$

$$\frac{\Theta}{M} = \frac{f_t h}{G J}$$

Equate Θ/M for shear and twist

$$\frac{f_s h^3}{7350.75 EI} + \frac{f_s h}{2450.25 GA_v} = \frac{f_t h}{G J}$$

Noting that $E = 2.4 G$

$$\frac{f_s h^2}{17641.8 I} + \frac{f_s}{2450.25 A_v} = \frac{f_t}{J}$$

$$f_t = f_s \left(\frac{J h^2}{17641.8 I} + \frac{J}{2450.25 A_v} \right)$$

$$f_t = f_s \left(\frac{2.457 \times 12^2}{17641.8 \times \left(\frac{1 \times 8^3}{12} \right)} + \frac{2.457}{2450.25 \left(\frac{5}{8} \times 1 \times 8 \right)} \right)$$

$$f_t = f_s (0.000470 + 0.000152)$$

$$f_t = 0.000622 f_s$$

$$f_t - 0.000622 f_s = 0$$

$$f_t + f_s = 0.25$$

$$1.000622 f_s = 0.25$$

$$f_s = 0.24984$$

$$f_t = 0.00016$$

Thus if $M = 100 \text{ Kft}$

$$4 \times 0.24984 \times 100 = 99.94 \text{ Kft} = 99.94\% \text{ resisted by shear}$$

$$4 \times 0.00016 \times 100 = 0.06 \text{ Kft} = 0.06\% \text{ resisted by twist}$$

Thus if torsional stiffness of wall varies by $\pm 40\%$ then the torsion resisted by twist is 0.04% to 0.08% of the total torsion